Tema 1: Señales en tiempo continuo

SEÑAL: una sola variable indep. ⇒ TIEMPO

SISTEMAS: Modifican una señal.

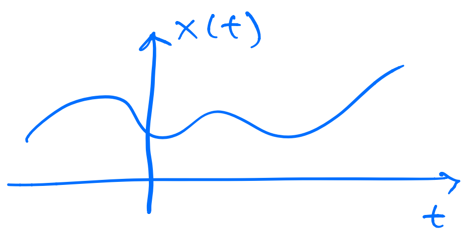
CLASIFICACIÓN

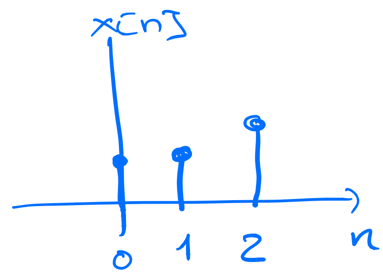
- $\boxed{\text{Tiempo continuo}}$ $\left[\begin{array}{l} x(t) \in \mathbb{C} \\ x(t) \in \mathbb{R} \end{array}\right]$, $t \in \mathbb{R}$
- Tiempo discreto

$\Downarrow$

$x[n] \in \mathbb{R}$

$x[n] \in \mathbb{C}$



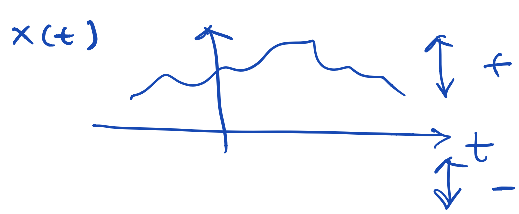


Ej: $y(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} t\right)$

Ej: T^a en días

SEÑALES DE ENERGÍA Y DE POTENCIA

ENERGÍA



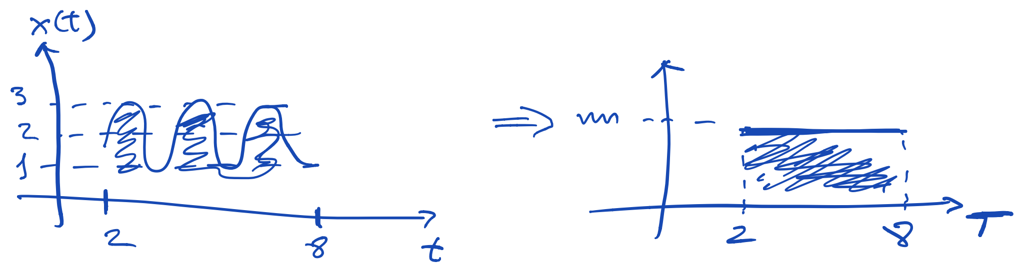
En un intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\boxed{E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt} \quad [J]$$

POTENCIA

$$\boxed{P} = \frac{1}{t_2 - t_1} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt}_{E} \quad [W] = [J/s]$$

VALOR MEDIO



Área rectángulo: Base × Altura

$$\text{área} = \int_{t_i}^{t_f} x(t) \, dt = m \cdot T \Rightarrow \boxed{m = \frac{\text{área}}{T}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle x(t) \rangle_{[T, t_0]} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} x(\tau) \, d\tau \; \ldots\ldots \\[2ex] \langle x(t) \rangle_{(t_i, t_f)} = \dfrac{1}{\underbrace{t_f - t_i}_{T}} \displaystyle\int_{t_i}^{t_f} x(\tau) \, d\tau \end{array} \right.$$

$$\boxed{-\infty < t < \infty}$$

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

$$\Rightarrow m_\infty = \langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(\tau)\, d\tau \right\}$$

3 TIPOS DE SEÑALES:

1) Señales de energía total finita: $\boxed{E_\infty < \infty}$

$\Rightarrow \boxed{P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T} = \emptyset}$

SEÑAL DEFINIDA EN ENERGÍA.

2) Señal con potencia finita: $P_\infty < \infty$

$\Rightarrow \boxed{E_\infty = \infty}$

SEÑAL DEFINIDA EN POTENCIA

$\Rightarrow$ Ej: SEÑALES PERIÓDICAS

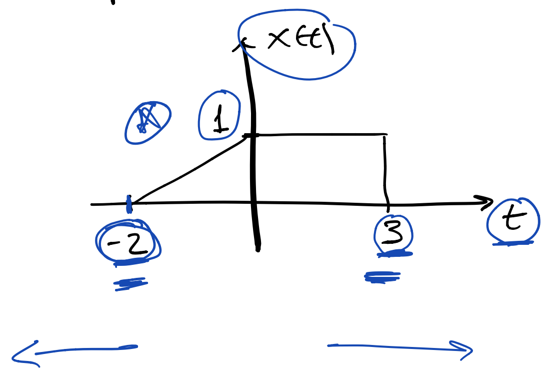
3) Señales para las cuales ni P_∞ ni E_∞ son finitas.

Ej: $x(t) = t$

Tema 1: Señales en tiempo continuo

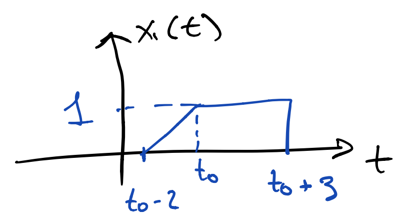
Transformaciones de la variable independiente

1) Desplazamiento en el tiempo



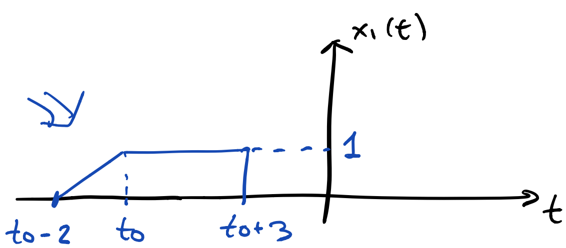
$x_1(t) = x(t - t_0)$

Si $t_0 > 0 \Rightarrow \boxed{x_1(t) = x(t - t_0)}$



RETARDO

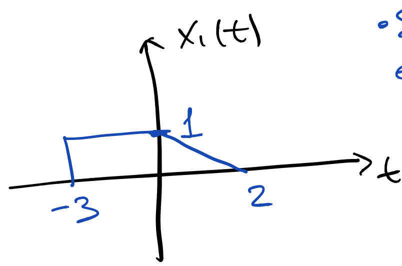
Si $t_0 < 0 \Rightarrow \boxed{x_1(t) = x(t + t_0)}$



ADELANTO

2) Reflexión o inversión de tiempo

$\boxed{x_1(t) = x(-t)}$

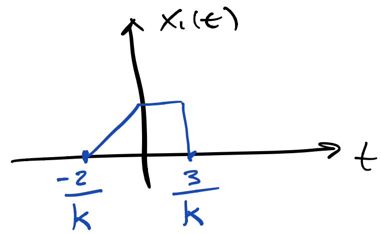


- Se invierte el eje de abcisas.

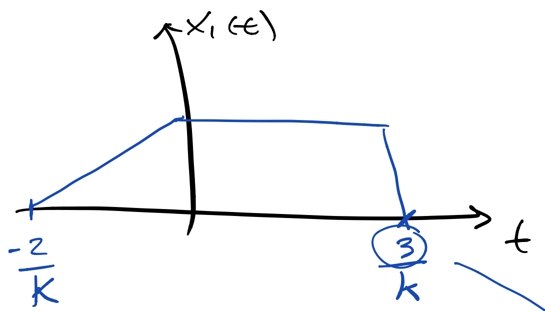
3) Escalado

$$x_1(t) = x(k \cdot t) \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

Si $k > 1$: Duración de la señal es menor (se estrecha)



Si $0 < k < 1$: Se expande. (Ej: $\frac{1}{2}$)



Ej: $k = \frac{1}{2}$ → $\frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$ → $\frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

Ej: ESCALADO Y DESPLAZAMIENTO A LA VEZ:

$$(-at - t_0)$$

1º Desplazamiento.
2º Escalado.
3º Reflexión.

Mejor camino ($x(t)$)

① $z(t) = x(t - t_0)$

② $q(t) = z(at) = x(at - t_0)$

③ $y(t) = q(-t) = x(-at - t_0)$

¿Por qué?

Tengo que tratar de dejar la "t" sola:

$$x(\underline{2}t-\underline{5}) \to x(\underline{2}(\underbrace{t-\tfrac{5}{2}}))$$

Tendría $x(2t) \to$ desplazamiento $t-\frac{5}{2}$

Si hago escalado temporal 1º:

$$z(t) = x(at)$$

$$q(t) = z(\underbrace{t-\tfrac{t_0}{a}}) = \left[x\left(a\left(t-\tfrac{t_0}{a}\right)\right)\right] =$$

$$= \left[x(at-t_0)\right]$$

$$y(t) = q(-t) = x(-at-t_0)$$

[La inversión lo último]

Ej: $x(t) \to x(\underline{2}t+6)$

① Desplaz. $\to x(t+6)$

② Escalado $\to x(2t+6)$
(compresión)

---

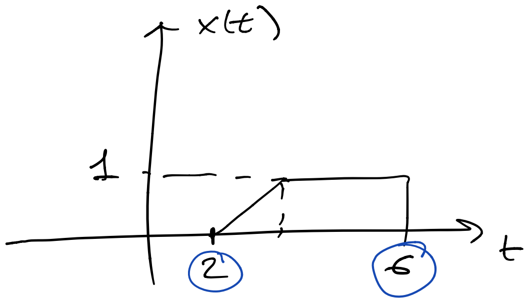
otro camino:

① Escalado: $x(2t)$

② Desplaz: $x\left(2\left(t+\frac{6}{2}\right)\right) \to x(2(t+3)) \to$

$\to x(2t+6)$

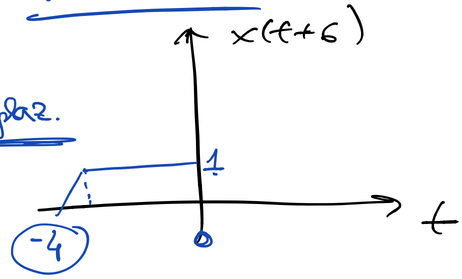
Gráficamente
___



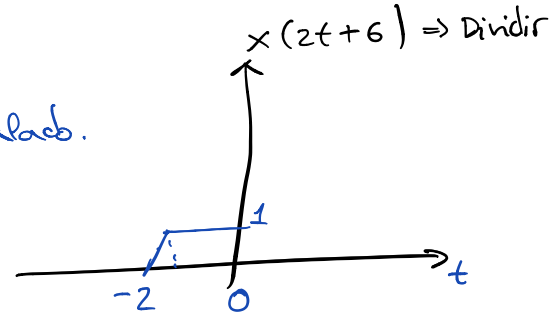
Quiero : $x(2t+6)$

Método 1

Desplaz.

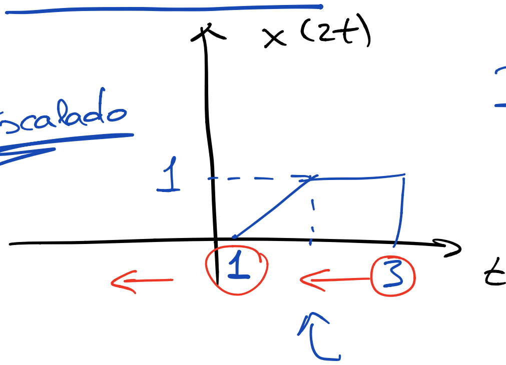


Escalado.

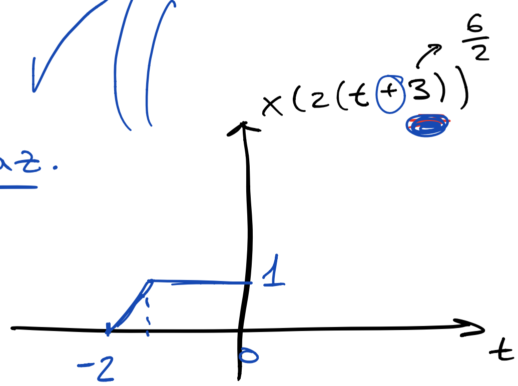


Método 2

Escalado



Desplaz.



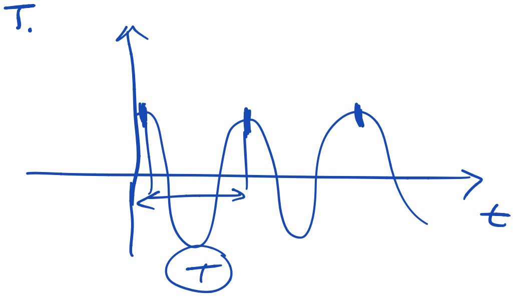
Periodicidad de señales

Una señal periódica $x(t)$ tiene un valor positivo T para el cual, se cumple:

$$\boxed{x(t) = x(t+T)}$$

para todos los valores de t.

La señal no cambia ante un desplazamiento de valor T.



Si $x(t)$ es periódica. $\Rightarrow$ $x(t) = x(t+mT)$ para todo t y cualquier $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Periódica con periodos $2T$, $3T$, $4T$....

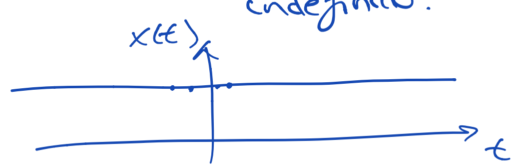
Periodo fundamental T_0

El valor positivo más pequeño de T.

(*) Esto se cumple excepto cuando $x(t) = cte$.

$\Downarrow$

El periodo fundamental es indefinido.



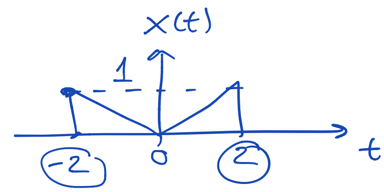
porque $x(t)$ es periódica para cq. valor de T.

Simetría de señales

SIMETRÍA PAR

$$\boxed{x(t) = x(-t)}$$

Ej:



$t=-2 \rightarrow x(t) = 1$

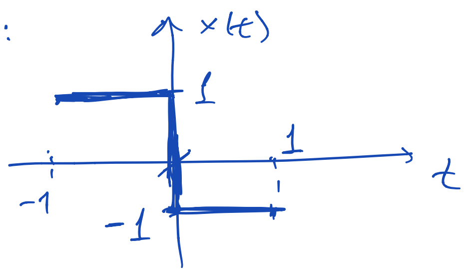
$x(-t) \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x(t) = 1$

SIMETRÍA IMPAR

$$\boxed{x(t) = -x(-t)}$$

- Si la señal es continua en $\emptyset$, su valor ha de ser $\emptyset$ para presentar simetría impar. (CONDICIÓN NECESARIA, NO SUFICIENTE).

Ej:



En el origen no está definida $\Rightarrow$ Discontinuidad

[Tiene simetría impar]

C.q. señal se puede descomponer en su parte par y su parte impar:

$$\left\{\begin{array}{ll} ① & x(t) = x_P(t) + x_I(t) \\ ② & x(t) = x_P(-t) + x_I(-t) \end{array}\right.$$

$x_I(t) = x_P(t) - x(-t)$

$$x_P(t) = x(t) - x_P(t) + x(-t)$$

$$\Rightarrow \quad 2x_P(t) = x(t) + x(-t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_P(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]} \quad (*)$$

PARTE PAR.

$$x_I(t) = x(t) - x_I(t) - x(-t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\, x_I(t) = x(t) - x(-t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_I(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]} \quad (*)$$

PARTE IMPAR

SIMETRÍA EN SEÑALES COMPLEJAS

① SIMETRÍA HERMÍTICA

$$\left[\, x(t) = x^*(-t) \,\right]$$

Si $x(t)$ es hermítica $\Rightarrow$
$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{Re}\{x(t)\} & \text{PAR} \\ \mathrm{Im}\{x(t)\} & \text{IMPAR} \\ |x(t)| & \text{PAR} \\ \text{arg. } \sphericalangle & \text{IMPAR} \end{array}\right.$

Ej:
$$x(t) = e^{it}$$
$$x^*(t) = e^{-it}$$
$$x^*(-t) = e^{it}$$

② SIMETRÍA ANTIHERMÍTICA

$$\boxed{x(t) = -x^*(-t)}$$

Ej:

$$x(t) = i\cos(t)$$

$$x^*(t) = -i\cos(t)$$

$$x^*(-t) = -i\cos(-t)$$

$$-x^*(-t) = i\cos(-t) = i\cos(t)$$

$$x(t) = x_h(t) + x_a(t)$$

$$x_h(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x^*(-t)\right]$$

$$x_a(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x^*(-t)\right]$$

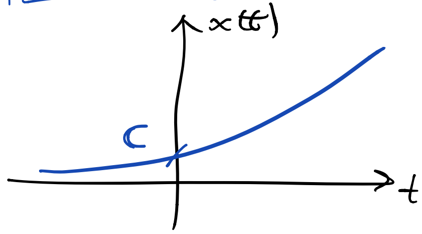
Señales básicas I

SEÑAL EXPONENCIAL COMPLEJA CONTINUA

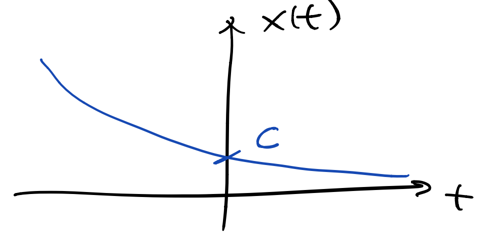
$$\left[x(t) = C\, e^{at} \right] , \text{ con } C \text{ y } a \in \mathbb{C}$$

① Si C y $a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Exponencial real.

Si $a > 0$



Si $a < 0$



② Señal periódica exponencial compleja

$$\left[x(t) = e^{j w_0 t} \right] \equiv \left| \underbrace{e^{j w_0 t}}_{\cos() + i \operatorname{sen}()} \right| = 1$$

Como es periódica $\Rightarrow e^{j w_0 t} = e^{j w_0 (t+T)}$

↳ Puesto que $e^{j w_0 t} = e^{j w_0 t} \cdot e^{j w_0 T}$

$$\Rightarrow \boxed{e^{j w_0 T} = 1} = \underbrace{\cos(w_0 T)}_{1} + \underbrace{i \operatorname{sen}(w_0 T)}_{0}$$

$$\Rightarrow w_0 T = 2\pi$$

- Si $w_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 1 \Rightarrow$ Periódica para c.q. valor de T.
- Si $w_0 \neq 0 \Rightarrow$ El período fundamental sería el valor $T ⊕$ más pequeño.

Será $\underline{\omega_o T = 2\pi}$ $\Rightarrow$ $\boxed{T_o = \dfrac{2\pi}{|\omega_o|}}$ $\rightarrow$ $\left[\omega_o = \dfrac{2\pi}{T_o}\right]$

(*) Se dice que un cjto. de funciones están armónicamente relacionadas, cuando sus frecuencias fundamentales son múltiplos de una sola frecuencia.

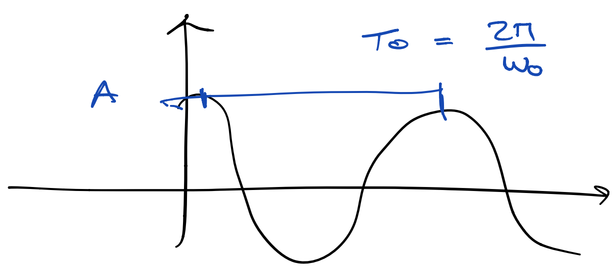
$$\phi_k(t) = e^{j\underline{k\omega_o} t} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

(Tengo ∞ armónicas)

$\Rightarrow$ $e^{j\omega_o t}$ y $e^{-j\omega_o t}$ tienen mismo período fundamental.

• SEÑALES SENOIDALES

$$\left[x(t) = A \cos(\omega_o t + \phi) \right] \qquad \underline{\omega_o} = 2\pi \underline{f_o}$$



Usando Euler:

$$e^{j\omega_o t} = \cos(\omega_o t) + i \operatorname{sen}(\omega_o t)$$

Una senoidal se puede escribir en términos de exp. complejas periódicas:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 t + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 t + \phi)}$$

esto se traduce:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \,\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

$$A \,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi) = A \,\mathrm{Im}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

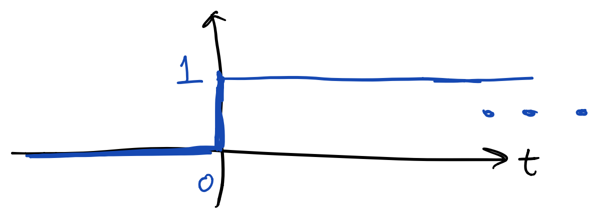
Recordatorio Euler

$$\left[\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \\ \mathrm{sen}(z) &= \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \end{aligned}\right]$$

Señales básicas II

FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases} \Rightarrow \text{Discontinuo en } t=0$$

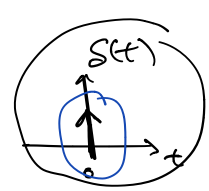


FUNCIÓN IMPULSO UNITARIO (Delta de Dirac)

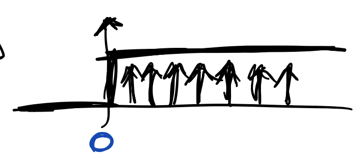
$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\delta(t) = \frac{d\,u(t)}{dt}}$$



$\Rightarrow$



$$u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\sigma)\, d\sigma = (*)$$

$t-\sigma=\tau$

$\frac{d\sigma}{d\tau} = -1 \Rightarrow d\sigma = -d\tau$

si $\sigma=0 \rightarrow \tau = t$

si $\sigma=\infty \rightarrow \tau = -\infty$

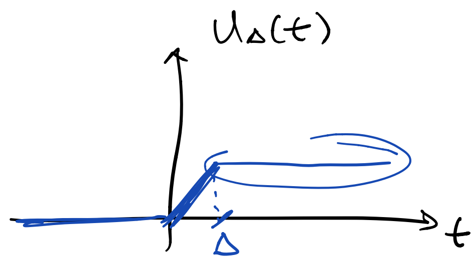
$$(*) = \int_t^{-\infty} \delta(\tau)(-d\tau) =$$

$$= - \int_t^{-\infty} \delta(\tau)\, d\tau =$$

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau}$$

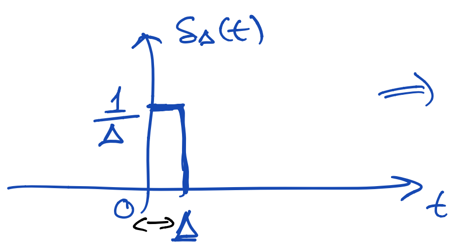
$u(t)$ es discontinua en $t=0$ $\Rightarrow$ No es diferenciable

Consideramos aproximación al escalón unitario, donde $u(t)$ se eleva de 0 a 1 en un corto intervalo (Δ)



Ahora podemos considerar la derivada:

$$\left[\delta_\Delta(t) = \frac{d\, u_\Delta(t)}{dt} \right]$$

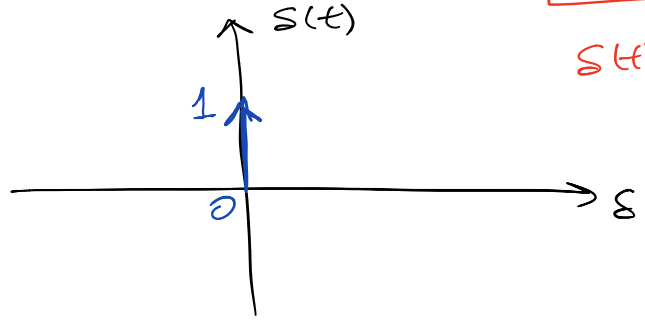


$\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\Delta(t)\, dt = 1 \equiv$ ÁREA

Si $\Delta \to 0 \Rightarrow \delta_\Delta(t)$ se vuelve más estrecha, y más alta, mantiene su área unitaria.

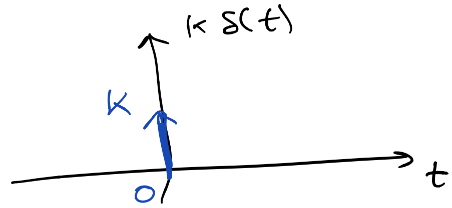
$$\Rightarrow \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) \Rightarrow \boxed{\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}}$$

$\delta(t)$ tiene área $= 1$



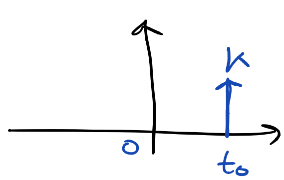
No tiene duración! sino área.

Así, $$\int_{-\infty}^{t} k\,\delta(\tau)\,d\tau = \boxed{k\,u(t)}$$

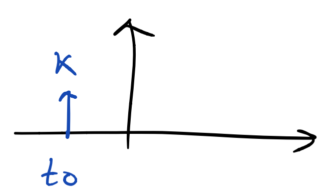


Si $x(t) = k\,\delta(t - t_0)$ $\Rightarrow$

si $t_0 > 0$



Si $t_0 < 0$



$$\Rightarrow \quad k\,\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\,\delta(t-t_0)\,dt \underset{\uparrow}{=} k \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t')\,dt'}_{1} = \boxed{k}$$

$t' = t - t_0$

$\frac{dt'}{dt} = 1 \Rightarrow dt' = dt$

- Si $x(t) = \delta(3t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \delta(3t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(3t)\,dt = \frac{1}{3}$$

Dem.

$t' = 3t$

$dt' = 3\,dt$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t') \cdot \frac{1}{3}\,dt' = \frac{1}{3} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t')\,dt'}_{1} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Pulso rectangular

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 : & -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 : & \text{resto} \end{cases}$$

$\neq 1$

Ej: A $\Rightarrow$

$$\begin{cases} A : & -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 : & \text{resto} \end{cases}$$

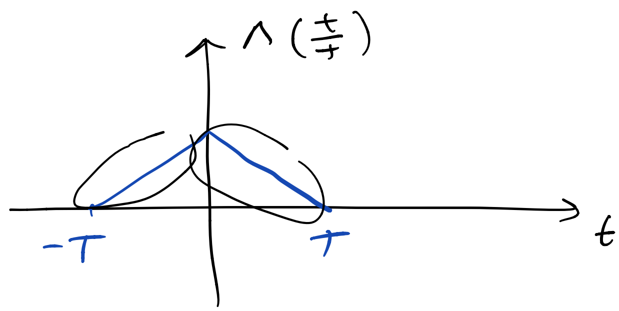
Ej: $A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ → Duración.

FUNCIÓN SINC

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}$$

FUNCIÓN TRIANGULAR

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{t}{T}+1 : & -T \leq t \leq 0 \\ -\frac{t}{T}+1 : & 0 \leq t \leq T \\ 0 : & \text{resto.} \end{cases}$$



Sistemas en el dominio del tiempo

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t)$$

Ej: Sistema integrador

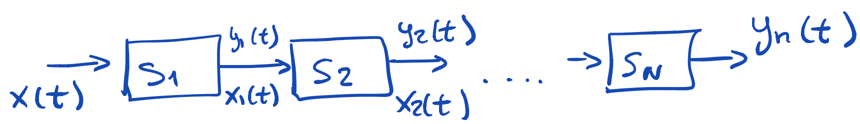
$[x(t) = t\, u(t)]$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} \tau\, d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2} \Rightarrow$$

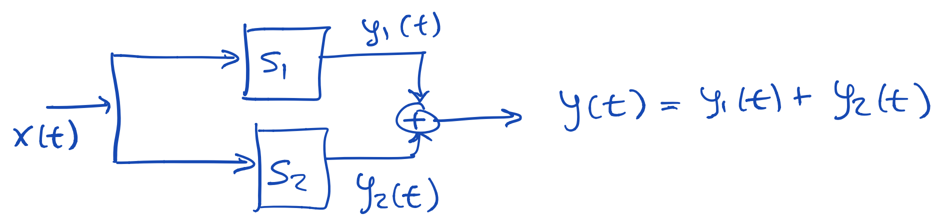
$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{2} t^2 u(t)}$$

Interconexión de sistemas

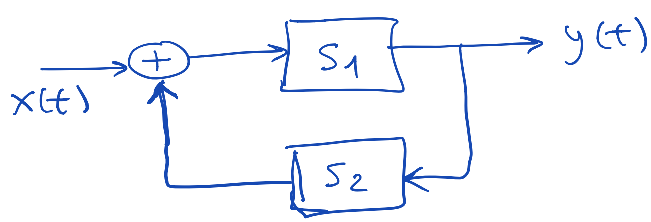
1) Interconexión en serie o cascada.



2) Interconexión en paralelo



3) Interconexión de retroalimentación



Propiedades de los sistemas I

1) SISTEMAS CON Y SIN MEMORIA

- Un sist. es sin memoria si su salida para cada valor de t, depende solamente de la entrada en ese instante.

Ej
$$y(t) = 3x(t) + x(t-1)$$
[Memoria]

$$y(t) = x(-t)$$
[Memoria]

[Todos los sistemas SIN MEMORIA son CAUSALES]

- Con memoria: Salida en el instante actual, depende del pasado o futuro de las señales.

2) Invertibilidad o Sistemas inversos

- Un sist. es invertible cuando exista un sist. que al conectarlo a la salida del 1°, obtengamos la señal de entrada.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sist.}} \xrightarrow{y(t)} \boxed{\text{Sist. Inv.}} \longrightarrow w(t) = x(t)$$

Ej: $y(t) = 3x(t) \longrightarrow x(t) = \frac{1}{3} y(t)$
Invertible

$y(t) = x^2(t)$ $\Rightarrow$ Ante entradas distintas me da la misma salida.
No invertible

- Si es invertible → encontrar su inverso
- Si no invertible → Contraejemplo
  - 2 entradas distintas → Misma salida
  - Donde se destruye la info.?

3) CAUSALIDAD

- Un sist. es causal si su salida en c.q. instante depende solo de los valores de la entrada o salida en el momento presente (ese instante) y/o del pasado (instantes anteriores).

[Todos los sist. sin memoria → causales]

- Sistema anticausal : su salida presente depende solo de la entrada o salida en el futuro.

Ej : $y(t) = x(t-2) + 3\,x(t)$

CAUSAL

$$\underset{t=2}{y(t)} = \underset{x(3)}{x(t+1)} + \underset{x(2)}{x(t)}$$

NO CAUSAL

Propiedades de los sistemas II

4) ESTABILIDAD

- Cuando al introducir al sistema una señal acotada, la salida también está acotada.

$$|x(t)| < K \longrightarrow |y(t)| < M \Big\} K, M \in \mathbb{R}^+$$

Ej: $y(t) = 3\,x(t)$

$$|x(t)| < K \Rightarrow |y(t)| = 3\,|x(t)| < 3K$$

ACOTADO $\longrightarrow$ ESTABLE

Ej: $y(t) = e^t \cdot x(t)$

$$|x(t)| < K$$

$$|y(t)| = e^t \cdot |x(t)| \Rightarrow \text{INESTABLE} \quad (\text{Si } t = \infty)$$

5) INVARIANZA EN EL TIEMPO

- Si ante un desplazamiento de la señal de entrada, se produce en la salida el mismo desplazamiento.

Ej: $y(t) = \text{sen}(x(t))$

$$\Rightarrow \boxed{y_1(t) = \text{sen}(x_1(t))} \quad 1^{\circ}$$

Supongamos que $x_2(t) = x_1(t - t_0)$

$$\Rightarrow \boxed{y_2(t) = \text{sen}(x_2(t)) = \text{sen}(x_1(t - t_0))}$$

$$2^{\circ} \quad y_1(t - t_0) = \text{sen}(x_1(t - t_0)) \quad \text{INVARIANTE}$$

6) LINEALIDAD

Si entrada es suma ponderada de varias señales,
la salida " " " " respuestas a
cada una de esas señales de entrada.

① Propiedad aditiva

② " escalamiento u homogeneidad

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$
$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$ $\Rightarrow$ Lineal si : ① $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$

② $a x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 x_1(t) + b\, x_2(t) \Rightarrow a y_1(t) + b y_2(t)}$$

LINEAL.

(*) Si el sistema es LINEAL : a una entrada nula le corresponde salida nula

Ej: $y(t) = x^2(t)$

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$

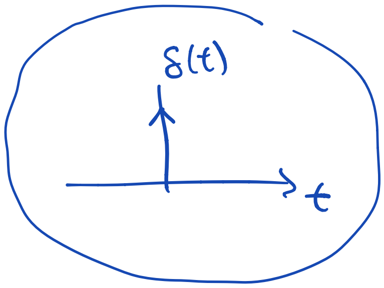
$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$

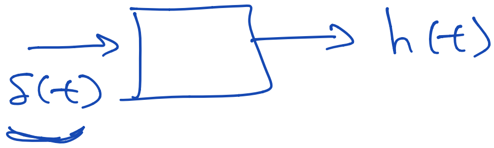
$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow y_3(t) = (a x_1(t) + b x_2(t))^2$$

$$\neq$$

$$\underbrace{a x_1^2(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{b x_2^2(t)}_{y_2(t)}$$

Sistemas LTI





- Supongamos que podemos expresar $x(t)$:

$$x(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k S_k(t)}_{} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t-kT)$$

- La respuesta del sistema a $S_k(t)$ es $V_k(t)$, por ser el sistema lineal:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{V_k(t)}_{}$$

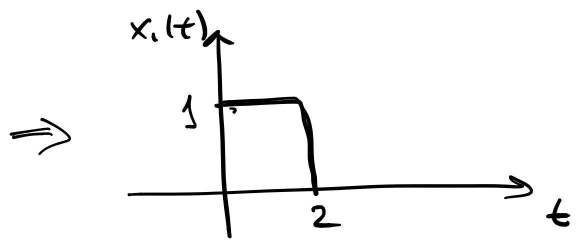
- Si la respuesta a $\delta(t)$ es $V_0(t)$, y el sistema es <u>invariante</u> $\Rightarrow$ la respuesta a $\delta(t-kT)$ es $V_0(t-kT)$

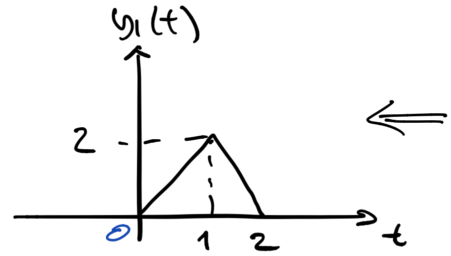
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k S_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t-kT)$$

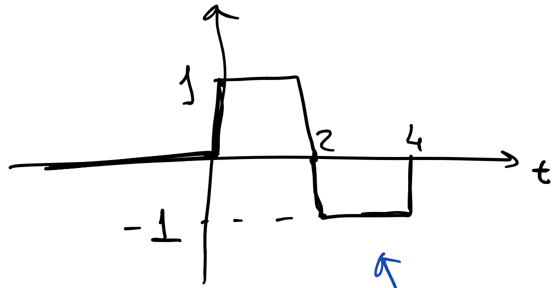
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k V_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k V_0(t-kT)$$

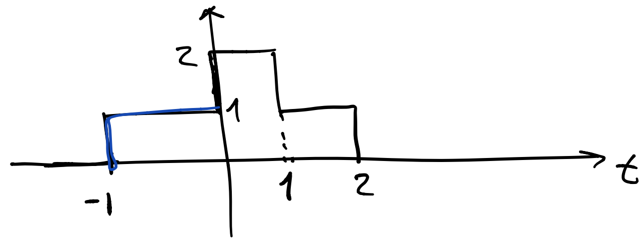
C.13 Considerar un SLTI cuya entrada es $x_1(t)$ y salida es $y_1(t)$.

Respuesta del sistema si meto $x_2(t)$ y $x_3(t)$?

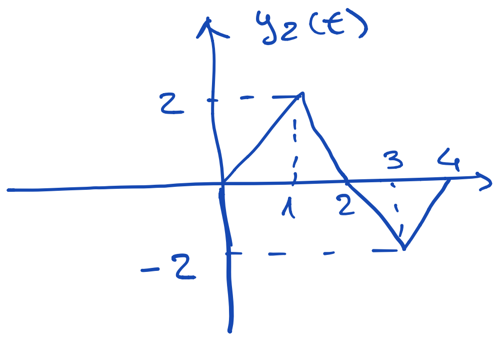






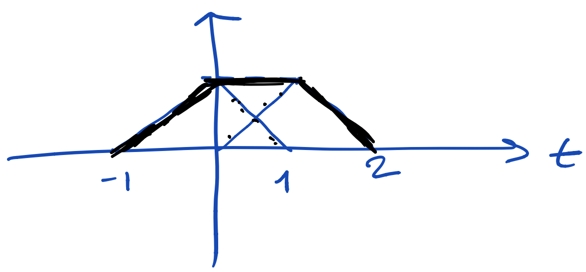


$$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$$
$$y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$



$$x_3(t) = x_1(t+1) + (2-1)\,x_1(t) = x_1(t+1) + x_1(t)$$

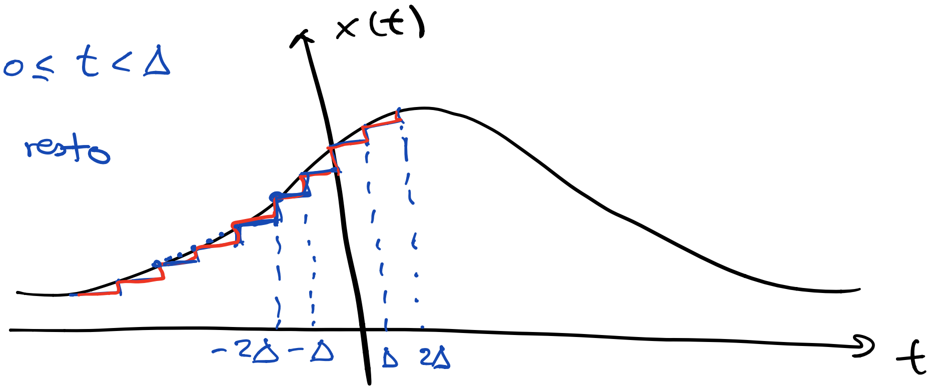
$$y_3(t) = y_1(t+1) + y_1(t)$$

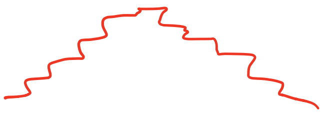


La integral de convolución

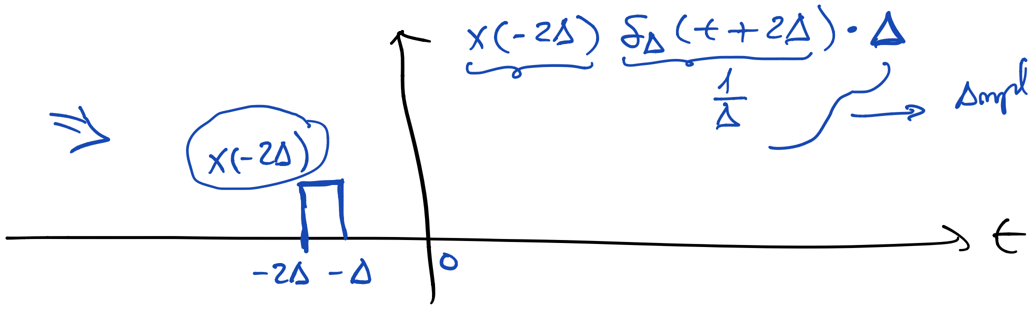
- Consideramos una aproximación, $\hat{x}(t)$, para $x(t)$

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \leq t < \Delta \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

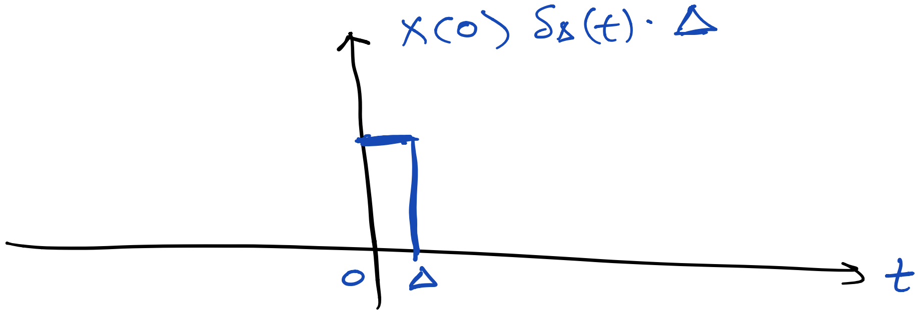




$$\Rightarrow \quad \underbrace{x(-2\Delta)}\ \underbrace{\delta_\Delta(t+2\Delta)}_{\frac{1}{\Delta}} \cdot \Delta \rightarrow \text{Amplitud } 1.$$



$$x(0)\ \delta_\Delta(t) \cdot \Delta$$



Si definimos : $\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \leq t < \Delta \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ ya que

$\delta_\Delta(t)\,\Delta$ tiene amplitud unitaria:

$$\left[\ \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\ \delta_\Delta(t-k\Delta) \cdot \Delta\ \right]$$

Conforme $\Delta \to 0$ la aprox. $\hat{x}(t)$ mejora cada vez más. En el lim será igual a $x(t)$.

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\, \delta_\Delta(t - k\Delta) \cdot \Delta$$

Asimismo, a medida que $\Delta \to 0$, el sumatorio se aproxima a una integral.

$$\left[x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau \right]$$

Ej: $x(t) = u(t)$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau$$

ya que: $u(\tau) = 0$ para $\tau < 0$
$u(\tau) = 1$ para $\tau > 0$

- Si $h_\tau(t)$ a la respuesta del sistema al impulso que llega en el instante τ ($\delta(t-\tau)$), y el sistema es invariante:

$$\left[h_\tau(t) = h_0(t-\tau) \right]$$

Para facilitar notación:
$$\boxed{h(t)} = h_0(t) \equiv \text{respuesta a } \delta(t)$$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x(\tau)} \cdot \underline{h(t-\tau)}\, d\tau}$$

INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

OPERACIÓN DE CONVOLUCIÓN

- En un <u>SLTI</u> si conozco <u>$h(t)$</u>, se conoce la respuesta a cualquier señal.

  <u>$h(t)$</u>: caracteriza completamente a un SLTI.

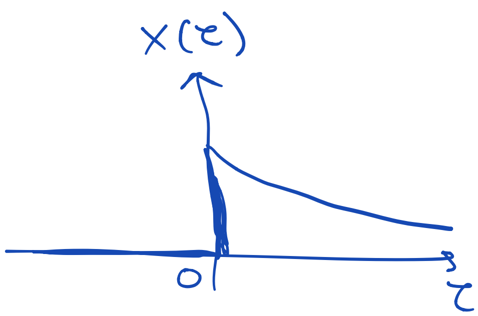
- Se ayuda de gráficas!

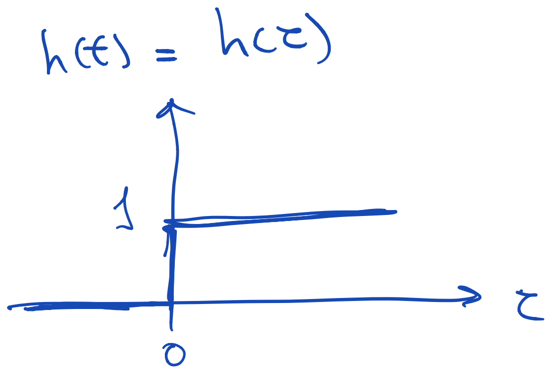
Ejemplo convolución

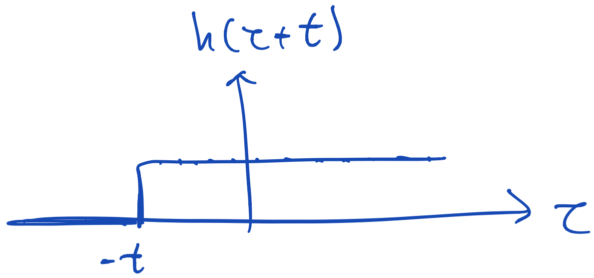
Sea $x(t) = e^{-at} \cdot u(t)$, $a > 0$

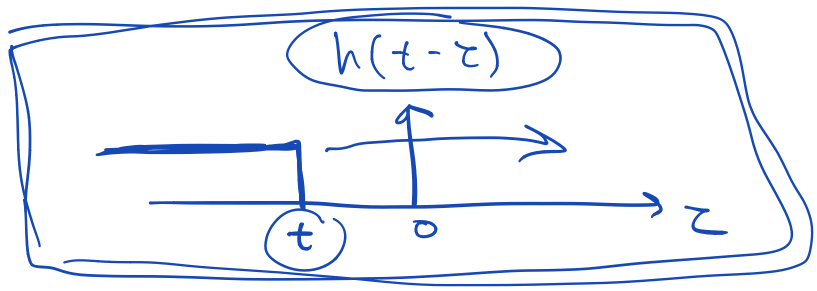
y $h(t) = u(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

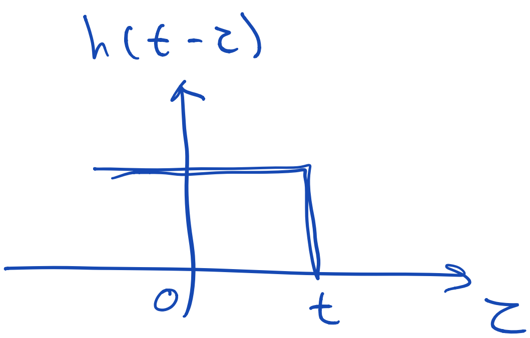








Para $t < 0 \Rightarrow x(\tau)\, h(t-\tau) = 0$



Para $t > 0 \Rightarrow x(\tau)\, h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau} & 0 < \tau < t \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

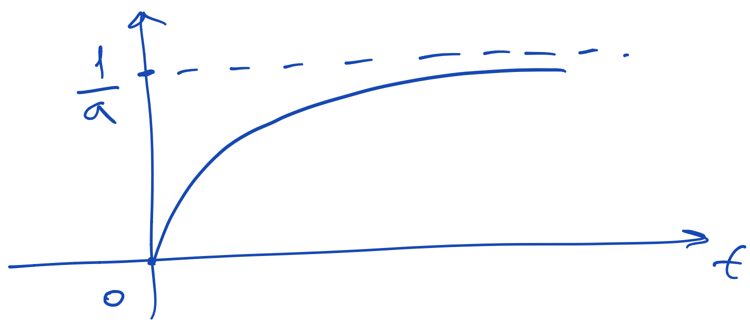
Para $t>0$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{-a\tau}\, d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau}\Big]_0^t =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)}$$

Para todo t:

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)\cdot \underline{u(t)}}$$



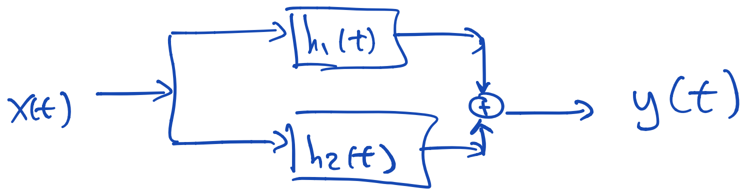
Propiedades de los sistemas LTI I

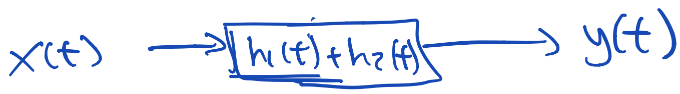
1) Propiedad conmutativa

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

2) Propiedad distributiva

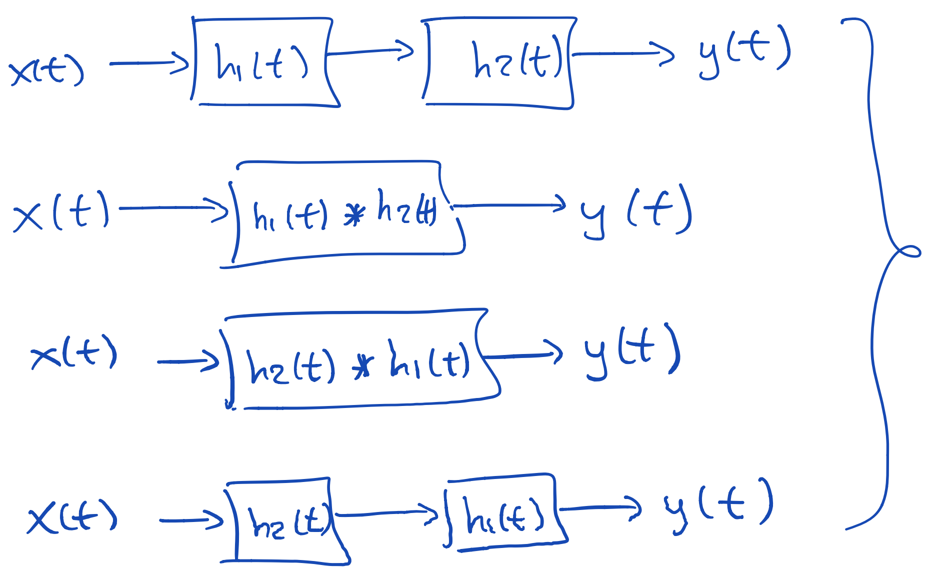
$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$





3) Propiedad asociativa

$$[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$



4) El elemento neutro de la convolución

- El impulso unitario

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\delta(t)} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

5) Convolución con un impulso desplazado

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \underline{x(t-t_0)}$$

Dem.

$$y(t) = x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-t_0-\tau)\, d\tau$$

$$t - t_0 - \tau = 0 \rightarrow \underline{\tau = t - t_0}$$

$$\boxed{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\, \delta(t-t_0-\tau)\, d\tau =$$

$$= x(t-t_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0-\tau)\, d\tau}_{1} = \boxed{x(t-t_0)}$$

Propiedades de los sistemas LTI II

6) SLTI con o sin memoria

Sin memoria: salida en c.q. instante depende de entrada en ese instante.
Para que esto se cumpla en LTI:

$$h(t) = 0 \quad \text{para } t \neq 0$$

$$y(t) = K\, x(t)$$

7) Invertibilidad

El inverso es un SLTI caracterizado por $h_1(t)$ que cumple:

$$\boxed{h(t) * h_1(t) = \delta(t)}$$

Ej: $h(t) = \delta(t-3)$; $h_1(t) = \delta(t+3)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot h_1(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-3) \cdot \delta(t-\tau+3)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\cancel{3}+t-\cancel{3}) \cdot \delta(t-\tau+3)\, d\tau =$$

$t-\tau+3=0$

$\tau = 3+t$

$$= \delta(t) \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t-\tau+3)\, d\tau}_{=1} = \boxed{\delta(t)}$$

8) Causalidad

Causal: $\boxed{h(\tau) = 0 \quad \text{para } \tau < 0}$

$$h(t) = h(t)\cdot u(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\, d\tau$$

9) Estabilidad

Entradas acotadas $\longrightarrow$ Salidas acotadas.

$$|x(t)| \leq K \Rightarrow |y(t)| = |x(t) * h(t)| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)|\, |h(\tau)|\, d\tau \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} K\, |h(\tau)|\, d\tau \leq K \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau \leq K_h \leq \infty}$$

10) Respuesta al escalón

Sea $s(t) = \underline{u(t)} * h(t) =$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau}_{} = \underbrace{\int_{-\infty}^{t} \underline{h(\tau)}\, d\tau}_{}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{h(t)} = \frac{d\, s(t)}{dt}}$$

- Exploraremos una representación alternativa →
  → Exponenciales complejas.

(*) Expresar señales periódicas como suma de exponenciales:

⟹ SERIES DE FOURIER

(*) Expresar cualquier señal como suma (con integral) de exponenciales:

TRANSFORMADA DE FOURIER.

Respuesta de SLTI a exponenciales complejas

$$e^{st} \longrightarrow \underbrace{H(s)}\, e^{st}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{st} \equiv \text{Función propia del sistema} \\ H(s) \equiv \text{Valor propio del sistema} \end{array} \right\} \equiv \text{AUTOFUNCIÓN}$$

Sea un SLTI caracterizado por $h(t)$:
Para una entrada $x(t) = e^{s_0 t}$, con $s_0 = \sigma + j\omega$, determinamos la salida mediante la convolución:

$$\boxed{y(t)} = x(t) * h(t) = e^{s_0 t} * h(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{s_0(t-\tau)} \cdot h(\tau)\, d\tau = e^{s_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s_0 \tau}\, d\tau}_{\text{CONVERGE} \;=\; H(s_0)} =$$

$$= \boxed{x(t) \cdot H(s_0)}$$

$H(s_0) \equiv$ cte. compleja

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \equiv \text{FUNCIÓN DEL SISTEMA}}$$

Ej: Calcular $y(t)$ mediante función del sistema:

SLTI $\quad h(t) = u(t)$

$$x(t) = A \cdot e^{s_1 t} + B\, e^{s_2 t} + C\, e^{s_3 t}$$

① Calculamos función del sistema:

$$\boxed{H(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-s\tau}\, d\tau = -\frac{1}{s}\left[e^{-s\tau}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{s}[0-1] =$$

$$= \boxed{\frac{1}{s}}$$

② Por linealidad:

$$\boxed{y(t)} = H(s_1)\cdot A\cdot e^{s_1 t} + H(s_2)\cdot B\cdot e^{s_2 t} + H(s_3)\cdot C\cdot e^{s_3 t} =$$

$$= \boxed{\frac{A}{s_1} e^{s_1 t} + \frac{B}{s_2} e^{s_2 t} + \frac{C}{s_3} e^{s_3 t}}$$

(*) ¿ Cómo responde un SLTI a exp. imaginarias puras?

$s = \sigma + j\omega \rightarrow \boxed{s = j\omega}$

$$y(t) = H(s=j\omega)\cdot x(t) = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\,d\tau =$$

$$= H(j\omega)\cdot e^{j\omega t}$$

$$\boxed{H(j\omega) \equiv \text{RESPUESTA EN FRECUENCIA}}$$

Ej: Dado un SLTI caracterizado por $h(t) = e^{-t}u(t)$

Respuesta en frecuencia?

$$x(t) = 2\cdot e^{j2t} + 3e^{j\pi t}$$

$$\boxed{H(j\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\cdot e^{-j\omega\tau}\,d\tau = \frac{-1}{1+j\omega}\left[e^{-(1+j\omega)\tau}\right]_0^{\infty} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{1+j\omega}}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{1+2j}e^{j2t} + \frac{3}{1+\pi j}e^{j\pi t}}$$

Desarrollo en serie de Fourier para señales periódicas (DSF)

- En el tema 1 se definió que una señal era periódica si:

$$x(t) = x(t+T) \text{ para todo } t.$$

$$\begin{cases} T \equiv \text{periodo fundamental} \\ w_0 = \frac{2\pi}{T} \equiv \text{frec. fundamental} \end{cases}$$

- 2 señales periódicas básicas (senoidales):

$$\left.\begin{cases} x(t) = \cos w_0 t \\ x(t) = e^{jw_0 t} \end{cases}\right]$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$w_0 \qquad T = \frac{2\pi}{w_0}$$

- Asociados a $e^{jw_0 t}$ está el cjto. de exp. complejas relacionadas armónicamente:

$$\phi_k(t) = e^{jkw_0 t} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

(Para $|k| \geq 2$, el T de $\phi_k(t)$ es una fracción de T).

De esta forma, una combinación lineal del exp. complejas relacionadas armónicamente:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}}$$

también es periódica con periodo T.

REPRESENTACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER.

Cálculo de los coeficientes del DSF

$$\left[x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right]$$

- Para obtener a_k, multiplicamos ambos miembros por: $e^{-jl\omega_0 t}$ e integramos en un periodo T_0:

$$\int_0^{T_0} x(t)\cdot e^{-jl\omega_0 t}\, dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jl\omega_0 t}\, dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^{T_0} \underbrace{e^{jk\omega_0 t}\, e^{-jl\omega_0 t}}_{= e^{j(k-l)\omega_0 t}}\, dt$$

Ojo

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-l)\omega_0 t}\, dt = \int_0^{T_0} \cos((k-l)\omega_0 t)\, dt + j\int_0^{T_0} \operatorname{sen}((k-l)\omega_0 t)\, dt$$

Para $\boxed{k \neq l}$ → cos y sen son periódicas de periodo $\frac{T_0}{|k-l|}$

⇒ Al integrar sobre intervalo de longitud T_0, que corresponde a un nº entero de periodos de estas señales:

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-l)\omega_0 t}\, dt = \boxed{0}$$ (se anulan áreas)

Para $\boxed{k = \ell}$

$$\Rightarrow \quad e^{j(k-\ell)w_0 t} = 1 \quad \Rightarrow \int_0^{T_0} e^{j(k-\ell)w_0 t} dt = \boxed{T_0}$$

Resumiendo:

$$\int_0^{T} e^{j(k-\ell)w_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = \ell \\ 0, & k \neq \ell \end{cases}$$

$$\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-j\ell w_0 t} dt = a_\ell T_0 \Rightarrow \underline{\underline{a_\ell}} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-j\ell w_0 t} dt$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t}} \equiv \text{Ec. de SÍNTESIS}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jkw_0 t} dt} \equiv \text{Ec. de ANÁLISIS}$$

- El coeficiente a_0 $(k=0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{a_0}} = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, dt} \equiv \text{Valor promedio de } x(t) \text{ sobre un periodo.}$$

Relación con la respuesta en frecuencia

- Respuesta en frecuencia de SLTI: $H(jw)$
- Si $x(t) = e^{jw_0 t} \longrightarrow y(t) = H(jw_0)\, e^{jw_0 t}$
- Si ahora $x(t) = x(t + T_0)$ (periódica):
  $\downarrow$
  admite DSF

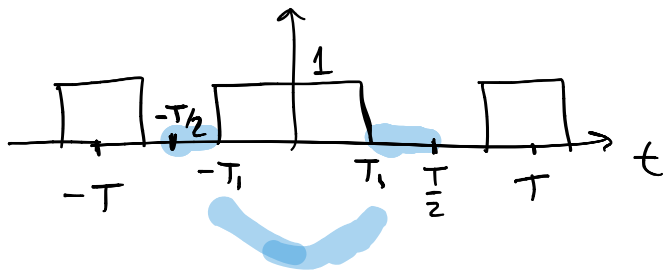
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(j\omega_0 k) e^{jk\omega_0 t}}$$

Ejemplo DSF

Ej: Calcular coef. DSF de $x(t)$ periódica dada por:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$



$$+\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right) = \frac{T}{2} + \frac{T}{2} = \boxed{T}$$

Para $\boxed{k=0}$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1\,dt = \frac{2T_1}{T}}$$

Para $\boxed{k \neq 0}$

$$\boxed{a_k} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\left(\frac{-1}{jk\omega_0}\right)\left[e^{-jk\omega_0 t}\right]_{-T_1}^{T_1} =$$

$$= -\frac{1}{jk\omega_0 T}\left[e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{+jk\omega_0 T_1}\right] =$$

$$\cdot 2 \quad = \frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right] =$$

$$= \frac{2}{k\omega_0 T}\,\text{sen}(k\omega_0 T_1) = \boxed{\frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi}}$$

Sustituyo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Ej: Cálculo coef. DSF por inspección:

$$x(t) = \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$, en este caso:

$$x(t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$$

Comparando ecuaciones:

$k=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2j}$; $k=-1 \Rightarrow a_{-1} = -\frac{1}{2j}$

$a_k = 0 \quad \forall \ k \neq \pm 1$

Propiedades del DSF

1) VALOR MEDIO

El coef. a_0 en todo DSF es el valor medio de la señal:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, \underbrace{e^{jk\omega_0 t}}_{k=0} dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, dt}$$

2) LINEALIDAD

Sean $x(t) = x(t+T)$ e $y(t) = y(t+T)$

$$x(t) \xrightarrow{DSF} a_k$$

$$y(t) \xrightarrow{DSF} b_k$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = A\, x(t) + B\, y(t) = z(t+T)$$

$$z(t) \xrightarrow{DSF} \boxed{c_k = A a_k + B b_k}$$

Dem.

$$z(t) = A\,x(t) + B\,y(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + B \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{(A a_k + B b_k)} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

3) DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

$x(t) \rightarrow y(t) = x(t-t_0)$, se conserva periodo T, y por tanto:

$$b_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t-t_0)\, e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \Rightarrow$$

$t - t_0 = \ell$ $\quad t=0 \rightarrow \ell = -t_0$

$dt = d\ell$ $\quad t=T \rightarrow \ell = T - t_0$

$t = \ell + t_0$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{T}\int_{-t_0}^{-t_0+T} x(\ell)\, e^{-jk\omega_0(\ell+t_0)}\, d\ell =$$

$$= e^{-jk\omega_0 t}\, \underbrace{\frac{1}{T}\int_T x(\ell)\, e^{-jk\omega_0 \ell}\, d\ell}_{a_k} =$$

$$= e^{-jk\omega_0 t} \cdot a_k$$

$$\boxed{x(t-t_0) \xrightarrow{DSF} b_k = a_k\, e^{-jk\omega_0 t_0}}$$

4) INVERSIÓN EN EL TIEMPO

Sea $y(t) = x(-t)$, si $y(t)$ es periódica:

$$\boxed{y(t) = x(-t) \xrightarrow{DSF} b_k = a_{-k}}$$

$$\begin{cases} \text{Si } x(t) \text{ es par} \rightarrow x(t) = x(-t) \rightarrow a_{-k} = a_k \\ \text{" " es impar} \rightarrow x(t) = -x(-t) \rightarrow a_{-k} = -a_k \end{cases}$$

5) ESCALADO EN EL TIEMPO

Sea $y(t) = x(at)$. Entonces, si $y(t)$ es periódica, de periodo $T_1 = \frac{T}{a}$:

$$\boxed{y(t) = x(at) \xrightarrow{DSF} b_k = a_k}$$

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(a\omega_0)t} \Leftarrow$$

6) MULTIPLICACIÓN

Sea $z(t) = x(t) \cdot y(t)$ periódica de periodo T

$$\boxed{z(t) = x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{DSF} c_k = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \, b_{k-\ell}}$$

convolución discreta.

7) CONJUGACIÓN Y SIMETRÍA CONJUGADA

Sea $y(t) = x^*(t)$ periódica de periodo T:

$$\boxed{y(t) = x^*(t) \xrightarrow{DSF} b_k = a^*_{-k}}$$

8) RELACIÓN DE PARSEVAL

$$\boxed{P_m = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2}$$

9) DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

$$\boxed{y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{DSF} b_k = jk\omega_0 \, a_k}$$

$$\boxed{z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \, d\tau \xrightarrow{DSF} c_k = \frac{1}{jk\omega_0} a_k}$$

07/10/2021

C2) DSF $x(t) = \cos(5\pi t + \pi/3) + \text{sen}(10\pi t)$

sin resolver ec. de análisis

1) $x(t)$ suma 2 señales sinusoidales. Estudiar periodicidad:

$$\left.\begin{array}{l} w_a = 5\pi = 2\pi/T_a \Rightarrow T_a = 2\pi/5\pi = 2/5 \text{ seg} \\ w_b = 10\pi = 2\pi/T_b \Rightarrow T_b = 2\pi/10\pi = 1/5 \text{ seg} \end{array}\right\} T_0 = \text{m.c.m}\{2/5, 1/5\} = 2/5 \rightarrow w_0 = 5\pi \text{ rad/s}$$

2) $x(t) = e^{j(5\pi t + \pi/3)} + e^{-j(5\pi t + \pi/3)} + \frac{1}{2j} e^{j(10\pi t)} - \frac{1}{2j} e^{-j(10\pi t)}$

Por ser period. admite DSF:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t} = \ldots + a_{-2} e^{-j2w_0} + a_{-1} e^{-jw_0} + a_0 + a_1 e^{jw_0} + a_2 e^{-j2w_0} + \ldots$$

Por tanto:
$$\begin{cases} a_{-2} = \frac{-1}{2j} = \frac{1}{2} j \\ a_{-1} = \frac{1}{2} e^{-j\pi/3} \\ a_1 = \frac{1}{2} e^{j\pi/3} \\ a_2 = \frac{1}{2j} \\ a_k = 0 \quad \forall\, k \neq \pm 1, \pm 2 \end{cases}$$

C3) Es posible DSF de $x(t) = \cos(5\pi t + \pi/3) + \text{sen}(10t)$

Estudiamos periodicidad

$$\left.\begin{array}{l} w_a = 5\pi \rightarrow T_a = 2/5 \\ w_b = 10 \rightarrow T_b = \pi/5 \end{array}\right\} T_0 = m.c.m\{2/5, \pi/5\} \nexists$$

$\Rightarrow$ $x(t)$ no es periódica no admite DSF

Transformada de Fourier

Coeficientes del DSF de una señal cuadrada

Partimos del ejemplo de onda cuadrada:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

que se repite periódicamente con periodo T.

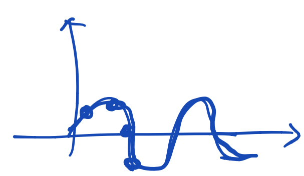
Coef. del DSF.

$$a_k = \frac{2\,\mathrm{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad a_k = \frac{\mathrm{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$\Rightarrow$ Forma alternativa de a_k:

$$T a_k = \underbrace{\frac{2\cdot \mathrm{sen}(\omega T_1)}{\omega}}\Bigg|_{\omega = \omega_0 k}$$

$\Rightarrow$ $\frac{2\,\mathrm{sen}(\omega T_1)}{\omega}$ envolvente de $T a_k$

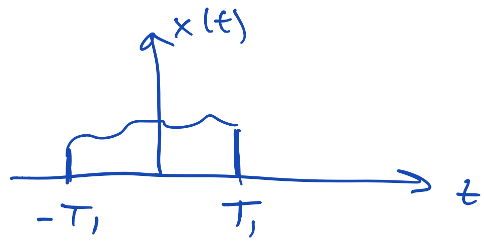


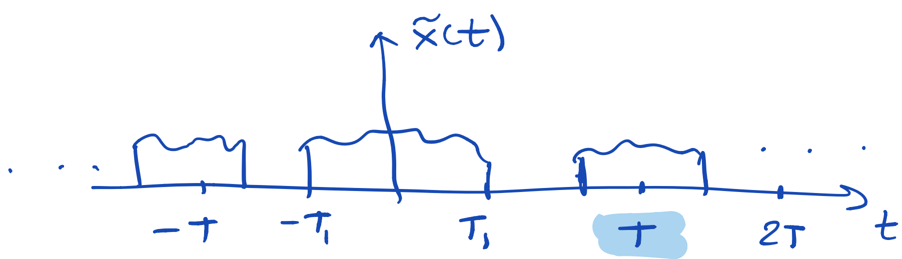
• Si $\uparrow T \Rightarrow \downarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$\uparrow\uparrow T \rightarrow$ onda cuadrada periódica se aprox. a un pulso rectangular.

$$\lim_{T\to\infty} x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_1}\right)$$

- Supongamos $x(t)$ finita.
(aperiódica)





Conforme $T\to\infty \Rightarrow \tilde{x}(t) = x(t)$ para c.q. valor finito de t.

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \tilde{x}(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT)$$

La señal $\tilde{x}(t)$ es periódica de periodo T, admite DSF:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk w_0 t} & [1] \\ a_k = \displaystyle\frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t) e^{-jk w_0 t} dt & [2] \end{cases}$$

Como $\tilde{x}(t) = x(t)$ para $|t| < \frac{T}{2}$, podemos reescribir a_k:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

y puesto que $x(t) = 0$ fuera de ese intervalo:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Por tanto, si $Ta_k = X(j\omega)$

$$\Rightarrow \boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt} \quad [3]$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

Podemos escribir los coef. a_k como:

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) \quad [4]$$

Combinando [1] y [4], $\tilde{x}(t)$ se puede expresar:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

y de forma equivalente, $\frac{2\pi}{T} = \omega_0$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

Cuando $T \to \infty$

$\tilde{x}(t) \to x(t)$; $k \cdot w_0 \to w$

$\sum \to \int$; $w_0 \to dw$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw}$$

TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER.

Resumen de TF

Ec. SÍNTESIS $\equiv$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$ $\equiv TF^{-1}$

Ec. ANÁLISIS $\equiv$ $X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$ $\equiv TF$

Espectro de $x(t)$

Ejemplos TF

Ej: TF de $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a>0$

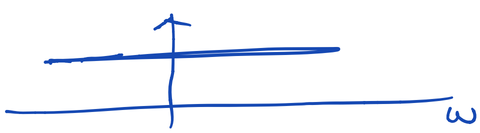
$$\boxed{X(j\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \underbrace{e^{-at} \cdot e^{-j\omega t}}_{e^{-(a+j\omega)t}}\, dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}\Big]_0^{\infty} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{a+j\omega}, \quad a>0}$$

Ej: TF de $x(t) = \delta(t)$

$$\boxed{X(j\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \boxed{1}$$



Propiedades de la TF

- Notación : $x(t) \xrightarrow{T.F.} X(jw)$

1) LINEALIDAD

Si $x(t) \xrightarrow{T.F} X(jw)$

$y(t) \xrightarrow{T.F} Y(jw)$

$$\boxed{a\,x(t) + b\,y(t) \xrightarrow{T.F.} a\,X(jw) + b\,Y(jw)}$$

2) DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

Si $x(t) \xrightarrow{T.F.} X(jw)$

$$\Rightarrow \boxed{x(t-t_0) \xrightarrow{T.F.} e^{-jwt_0} \cdot X(jw)}$$

Dem.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

$$\rightarrow x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jw(t-t_0)}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\underbrace{e^{-jwt_0} \cdot X(jw)}_{T.F.\{x(t-t_0)\}}]\, e^{jwt}\, dw$$

3) CONJUGACIÓN Y SIMETRÍA CONJUGADA.

Si $x(t) \xrightarrow{T.F.} X(jw)$

$$\Rightarrow \boxed{x^*(t) \xrightarrow{T.F.} X^*(-jw)}$$

4) DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} jw\, X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{T.F} jw\, X(jw)}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{jw} X(jw) + \underbrace{\pi\, X(0)\, \delta(w)}}$$

5) ESCALADO EN EL TIEMPO

Si $x(t) \xrightarrow{T.F.} X(jw)$

$$\boxed{x(at) \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{jw}{a}\right)}$$

6) DUALIDAD

$$\left\{ \begin{array}{l} g(t) \xrightarrow{T.F.} f(w) \\ f(t) \xrightarrow{T.F.} 2\pi\, g(-w) \end{array} \right\}$$

7) RELACIÓN DE PARSEVAL

$$\boxed{E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega}$$

8) PROPIEDAD DE CONVOLUCIÓN

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{T.F.} Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)}$$

$$\boxed{z(t) = x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{T.F.} Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)}$$